УДК 331

Е.В. Черепанов
кандидат технических наук, доцент
Национальный исследовательский аэрокосмический университет
«Московский авиационный институт (МАИ)»
г. Москва, Россия
redaction-el@mail.ru

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПОТРЕБЛЕНИЯ, ТОРГОВЛИ И ПРОИЗВОДСТВА

[*Cherepanov E.V.* Functional interconnections between consumption, trade and production features]

An approach that allows to quantitatively describe the time-consumer markets of various types from a single viewpoint is considered. The problem of optimization of the structure of the shopping cart is revealed. The approach is based on the analysis of the interaction of the total subjects of eco-nomic activity: producers, sellers and buyers. Using the optimization criteria, it is found the form of functional relationships between the characteristics of consumption, production and trade. In particular, the aggregate demand function and the production function.

Key words: utility, value, consumer surplus, the consumer price, wholesale price, production, demand, supply, costs, costs of the seller, the cost of pro-manufacturer's profit.

В середине XIX в. в своих работах У. Джевонс заложил базовую основу «теории обмена, которая является следствием теории полезности» [23]. Под *полезностью* товара понимается количество *блага*, которое потенциально в нем заложено. Но как понимать саму категорию «благо»? Проблема «человеческого блага» занимала умы мыслителей с Античных времен. Аристотель [2, с.798] полагал, что «сознательный выбор, как принято считать, стремится к определенному благу. Но, видимо, не безосновательно считать, что благо и счастье люди представляют себе, исходя из собственного образа жизни… Следовательно, «благо» как нечто общее, объединенное одной идеей, не существует». В этом же смысле высказывался и Дж. Винер: «Благосостояние есть поток полезности, а *полезность означает удовлетворение*. Экономисты могут принять удовлетворение как *количество*, не занимая никакой позиции по отношению к его этическому качеству… Какова бы ни была сущность благосостояния, все согласны с тем, что для человека она, скорее, субъективная и внутренняя, чем объективная и внешняя» [25].

Следовательно, полезность товара для потребителя связана с величиной потенциально заложенных в нем способностей удовлетворить некоторые потребности покупателя, которые каждый человек формирует индивидуально, исходя из социальных представлений, своего личного образа жизни или нужды.

В основе изучения потребительских рынков лежит понятие *спрос покупателей*, причем в курсах микроэкономики [10], к которым традиционно относят теорию потребления, базовым понятием является *индивидуальный спрос* отдельного покупателя. Под индивидуальным спросом понимается количество товара, которое данный покупатель готов приобрести в заданных условиях розничного рынка. Суперпозиция индивидуальных спросов потенциальных покупателей рынка образует *совокупный спрос* на данном рынке. Совокупный спрос на товар *крайне редко* можно представить простой суммой индивидуальных спросов на него, что обсуждено, например, в монографии В.К. Горбунова [4]. Обычно совокупный спрос является сложной комбинацией индивидуальных спросов покупателей.

Причем кривая индивидуального спроса может иметь различный вид (поскольку отдельный индивидуум плохо «вписывается» в рамки рационального потребления), а совокупный спрос объективен и, проявляясь в форме потребления, измерим. Можно ожидать, что он должен описываться вполне конкретными функциональными зависимостями (от цены товара, издержек продавца и т.п.). Под термином «рациональное потребление покупателя» понимается не традиционная модель Слуцкого – Хикса максимизации порядковой функции полезности при бюджетном ограничении [11,12], а более широко – такое потребительское поведение, которое при заданном критерии оптимальности является «наилучшим» для достижения максимальной выгоды покупателей [15].

У. Джевонс утверждал, что «законы экономики носят настолько сложный характер, что проявляются только для совокупностей и должны изучаться методом средних» [22]. Высказывание У.С. Джевонса конкретизирует В.К. Горбунов: «Применение методов математического анализа может быть продуктивным лишь для всего ансамбля потребителей изучаемого рынка. Именно поведение такого ансамбля представляет торговая статистика, и он может приниматься как априорный объект математического моделирования» [4]. Эта позиция, которую автор полностью разделяет, полностью согласуется с мыслью У. Джевонса о проявлении экономических законов только для *совокупностей* субъектов экономической деятельности на потребительских рынках.

Для удовлетворения спроса производители и продавцы товаров *целенаправленно* формируют объемы своих предложений и цены на товары. Как правило, целенаправленная экономическая деятельность поддается количественному описанию, в основе которого, чаще всего, лежат процедуры оптимизации, обеспечивающие получение максимума целевых функций. Эту точку зрения разделяет и В.К. Горбунов [4]: «Оптимизационный подход более естествен для построения экономической теории как науки о рациональном поведении субъектов и превосходит по прикладному потенциалу теорию выявления предпочтений».

В предлагаемой статье, которая служит развитием и существенным уточнением работ [14,17–19], предложен метод описания вида функциональных взаимосвязей между характеристиками потребления, торговли и производства товаров. В основе подхода лежат критерии оптимизации, в том или ином смысле максимизирующие выгоду *совокупных* субъектов экономической деятельности.

Характеристики потребительского многотоварного рынка

На многотоварном потребительском рынке совокупный спрос $\vec{n}(\vec{p})$, как функция вектора цен определяет структуру корзины товаров, которые *совокупный* покупатель хочет и может приобрести в предлагаемых ему условиях. *Потребление* – это количество *реально* купленных (*за единицу времени*) товаров. Таким образом, *потребление – это реализованный* (за единицу времени) *потребительский спрос*.

Рассмотрим рынок из *m* видов конкурентных товаров. Пусть *j*-й товар за единицу времени приобретен совокупным покупателем в объеме n_j. Купленный набор товаров обладает какой-то *полезностью* для совокупного покупателя. Экономический смысл категории *полезности* товаров был обсужден выше. *Ценность* набора товаров $U(n_1, n_2, ..., n_m)$ – это выражение полезности этого набора в деньгах. *Деньги выступают как единая шкала измерения ценности, позволяющая сравнивать полезность товаров различной природы и качества*.

Таким образом, функция ценности набора товаров – это отображение вида $U: \vec{n} \mapsto U(\vec{n}) \in \Re_1^{\oplus}$ $(\vec{n} \in \Re_m^{\oplus})$, монотонно возрастающее с ростом потребления каждого товара. Функция $U(\vec{n})$ всюду выпукла вверх по каждому аргументу (обобщение первого закона Госсена для совокупного спроса): априори считается, что покупка $(k+1)$-й единицы любого товара менее полезна, чем была покупка k-й единицы этого товара. Розничная *цена* p_j j- го товара – это *среднестатистическое* отношение количества денег V_j, отданных покупателями (в единицу времени) за товар, к количеству n_j приобретенного товара. Стоимость единиц j-го товара равна:

$$V_j = p_j n_j, \ \ j = \overline{1,m}. \tag{1.1}$$

Суммарная стоимость купленных (за единицу времени) товаров V, которую часто называют *бюджетом рынка*, определена в виде

$$V = V(\vec{n}) = \sum_j^m p_j n_j. \tag{1.2}$$

Потребительский излишек (*или излишек потребителя*) W, введенный в экономическую науку Ж. Дюпюи [21], *является мерой выгоды совокупного покупателя* от приобретения товаров в объемах $n_1, n_2, ..., n_m$:

$$W(\vec{n}) = U(\vec{n}) - V(\vec{n}) \ ; \vec{n} \in \Re_m^{\oplus}. \tag{1.3}$$

Считается, что совокупный покупатель стремится в среднестатистическом смысле «максимально выгодно» сформировать потребительскую корзину приобретенных товаров. Но понятие «максимально выгодно» требует конкретизации [15], допуская в качестве исходных предпосылок различные критерии оптимизации. На практике наиболее часто используют *принцип оптимума потребителя* (ПрОП), который [10, гл.4] имеет в вид

$$\begin{cases} U(\vec{n}) = \max(\vec{n}) \ ; \\ \sum_k^m p_k n_k = V_0 = Const; \\ p_k = const, \ \ k = \overline{1,m} \ . \end{cases} \tag{1.4}$$

Замечание. Использованное в (1.4) и далее (в различных критериях максимизации) условие типа $p = Const$ правомерно только для очень малого промежутка времени, которым мы вынуждены считать «единицу времени» – временной промежуток, за который проводится замер торговых статистических параметров изучаемого потребительского рынка. Смысл этого состоит в том, что *мы устанавливаем некоторые законы* торговли или потребления (находим соответствующие математические выражения) для конкретного промежутка времени. Но поскольку *замер параметров рынка в любой момент времени «равноправен» иным измерениям*, полученные для данной единицы времени математические соотношения должны выполняться в любую другую единицу времени. Это дает возможность математически *выявить экономические законы*, *определяющие рынок.*

Из критерия (1.4), используя метод множителей Лагранжа [13], получаем:

$$L(\vec{n}) = U(\vec{n}) + \lambda V_0 - \lambda \sum_k^m p_k n_k = \max(\lambda, \vec{n}); \quad p_k = const, \ k = \overline{1,m}. \tag{1.5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial U(\vec{n})}{\partial n_k} = \lambda p_k \right) \wedge \left(\frac{\partial^2 U(\vec{n})}{\partial n_k^2} < 0 \right), \ k = \overline{1,m}. \tag{1.6}$$

Постоянство цен здесь и далее понимается исключительно для небольших промежутков («*единиц*») времени. Такой подход правомерен в рамках естественнонаучной традиции[1]. Множитель Лагранжа λ, по существу, представляет собой *параметр рынка* как такового и не зависит от структуры потребления товаров.

Выражения (1.6) справедливы и для однотоварного рынка (при). Разумеется, об использовании ПрОП на однотоварном рынке говорить не приходится. Но из простых соображений можно показать, что *на однотоварном, в частности – монопольном, рынке предельная ценность товара равна его цене*. Используя это, при условии максимума прибыли всех продавцов, удается математически описать связи между характеристиками однотоварного рынка [16].

Смысл ПрОП прозрачен: при любом бюджете потребительского рынка , затраты на покупки товаров распределятся так, чтобы максимизировать ценность приобретенной покупателями корзины товаров. Например, Г.Саймон считает, что «в основе теории потребления лежит предположение о том, что совокупный покупатель стремится к максимизации полезности купленных товаров» [24]. Эта точка зрения, хотя и не бесспорна, сегодня является абсолютно доминирующей.

В основе наших рассуждений о функционировании потребительских рынков лежит анализ цепочки продаж товара: от производителей – продавцам

[1]В механике при изучении непрерывного движения рассматривается *мгновенная скорость*, которая, по сути, является средней скоростью в данную (очень малую) единицу времени

на розничном рынке, от продавцов – покупателям. Составим таблицу, где укажем характеристики категорий для субъектов экономической деятельности. К этой таблице мы будем возвращаться по мере необходимости.

Характеристики экономических категорий потребительских рынков

	Полезность (ценность)	Затраты (издержки)	Мера выгоды
Совокупный покупатель	$U(n)$	$V(n) = n\,p(n)$	$W = U - V$
Совокупный продавец	$\widetilde{U}(n)$	$\Omega(n) = \overline{\Omega} + \widetilde{\Omega}(n) = \widetilde{V}(n) + Q(n)$	$P = V - \Omega$
Совокупный производитель	$\widetilde{V}(n) = n\,\widetilde{p}(n)$	$S(n) = \overline{S} + \widetilde{S}(n)$	$\widetilde{P} = \widetilde{V} - S$

Совокупный продавец, выступая в качестве покупателя на закупочном рынке, приобрел за сумму $\widetilde{V}(\vec{n})$ у *производителей* набор товаров $\vec{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ для их перепродажи на розничном рынке. За единицу времени на розничном рынке *совокупный продавец* продал *покупателям* этот же набор товаров за сумму $V(\vec{n})$.

Далее нам потребуются новые переменные $\vec{\zeta}$, использование которых резко упрощает запись получаемых математических выражений. Определим их в виде

$$\forall\, j:\ \zeta_j = \ln(n_j / \overline{n}_j),\ n_j > \overline{n}_j \quad \Leftrightarrow \quad n_j = \overline{n}_j \exp(\zeta_j), \tag{1.7}$$

причем операторы дифференцирования по компонентам вектора $\vec{\zeta}$ имеют вид

$$\forall\, j:\quad \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_j} = n_j \frac{\partial}{\partial n_j} \right) \wedge \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_j^2} = n_j \frac{\partial}{\partial n_j} + n_j^2 \frac{\partial^2}{\partial n_j^2} \right). \tag{1.8}$$

Перейдя к переменным $\vec{\zeta}$, из (1.6) получаем выражение вида

$$\lambda V_j = n_j \frac{\partial U_j}{\partial n_j} = \frac{\partial U_j}{\partial \zeta_j}. \tag{1.9}$$

2. Критерий максимизация прибыли продавцов на многотоварном рынке

Рассмотрим розничный потребительский рынок, на котором представлено m видов конкурентных товаров. Будем считать, что каждый j-й товар куплен совокупным покупателем в объеме n_j по *розничной* цене p_j, а стоимость j-го товара равна $V_j = V(n_j) = p_j n_j$. Для простоты изложения, не снижая его общности, можно считать, что каждый товар производится одним производителем и продается на розничном рынке только одним продавцом.

Совокупные издержки Ω_j продавца j-го товара *всегда* можно представить [6, гл.6] в виде

$$\Omega_j = \overline{\Omega}_j + \widetilde{\Omega}(n_j)\,; \quad \overline{\Omega}_j = Const, \;\; j = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

где $\overline{\Omega}_j$ и $\widetilde{\Omega}_j = \widetilde{\Omega}(n_j)$ – соответственно постоянные (не зависящие от объема продаж) и переменные (зависящие от величины) издержки продавца j-го товара в *единицу* времени. Удельные переменные издержки продавца j-го товара:

$$\widetilde{\omega}_j = \widetilde{\omega}(n_j) = \widetilde{\Omega}_j / n_j \tag{2.2}$$

зависят от n_j. Но *в данную единицу времени можно считать константой*[1].

В основе теории торговли [6,11,16] лежит принцип максимизации прибыли P, которая для продавца j-го товара определяется в виде

$$P_j = P(n_j) = V(n_j) - \Omega(n_j) = V_j - \Omega_j\,; \;\; j = \overline{1,m}\,. \tag{2.3}$$

Правомерно записать критерий максимизации прибыли продавца j-го товара в виде

$$P_j = V(n_j) - \overline{\Omega}_j - \widetilde{\omega}_j n_j = \max(n_j); \widetilde{\omega}_j = Const, j = \overline{1,m}, \tag{2.4}$$

где переменные удельные затраты продавца j-го товара мы считаем постоянной величиной *только для данной* (*малой*) *единицы времени*. Критерий (2.4) дает необходимое и достаточное условия максимизации величины P_j:

$$\forall\, j: \;\; \left(dV_j / dn_j = \widetilde{\omega}_j \right) \wedge \left(d^2V_j / dn_j^2 < 0 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; dV_j / dn_j = \widetilde{\Omega}_j / n_j \;\Rightarrow\; \widetilde{\Omega}_j = dV_j / d\zeta_j, \;\; j = \overline{1,m}\,. \tag{2.5}$$

Отсюда, используя переменные вида (1.7), запишем следующие соотношения:

$$V_j = \overline{C}_j + \int_0^{\zeta_j} \widetilde{\Omega}_j(x)dx; \;\; \partial\overline{C}_j \big/ \partial n_j = 0 \neq \partial\overline{C}_j \big/ \partial n_k\,; \;\; k \neq j; \;\; j,k = \overline{1,m}. \tag{2.6}$$

Параметр $\overline{C}_j$ не зависит от проданного объема j-го товара. Ниже будет показано, что $\overline{C}_j = \overline{\Omega}_j$. Проинтегрировав (2.6) по частям, получаем выражение вида:

$$V_j = \overline{C}_j + \zeta_j \widetilde{\Omega}_j - \int_0^{\zeta_j} x\, \widetilde{\Omega}'_j(x)\, dx; \; j = \overline{1,m}\,. \tag{2.7}$$

Для *совокупного* покупателя ценность и излишек потребителя при покупке j-го товара обозначим U_j и W_j соответственно. Поскольку $V_j = U_j - W_j$ (см. таблицу 1), с учетом (2.7), *в качестве гипотезы, которую нужно обосновать*, запишем:

$$U_j = \overline{C}_j + \zeta_j \widetilde{\Omega}_j\,; \;\; j = \overline{1,m}\,; \tag{2.8}$$

$$W_j = \int_0^{\zeta_j} x\, \widetilde{\Omega}'(x)\, dx\ ;\ j = \overline{1,m}\ . \qquad (2.9)$$

3. Издержки продавцов на многотоварном потребительском рынке

Из условий (1.9), (2.6) и (2.8) находим

$$\zeta_j d\widetilde{\Omega}_j / d\zeta_j + \widetilde{\Omega}(\zeta_j) = \lambda \overline{C}_j + \lambda \int_0^{\zeta_j} \widetilde{\Omega}(x) dx\ . \qquad (3.1)$$

Продифференцировав (3.1), получим, опуская для краткости индексы, уравнение:

$$\zeta\ \widetilde{\Omega}''_\zeta + 2\, \widetilde{\Omega}'_\zeta = \lambda\, \widetilde{\Omega}(\zeta)\ . \qquad (3.2)$$

Используя [5, п.2.2.103], общее решение уравнения (3.2) запишем в виде

$$\widetilde{\Omega}(\zeta) = \zeta^{-1/2} Z_{-1}(2i\sqrt{\lambda\zeta})\ ;\ i^2 = -1\ , \qquad (3.3)$$

где $Z_{-1}(z)$ - цилиндрическая функция минус 1-го порядка от мнимого аргумента.

Для цилиндрических функций $Z_\nu(z)$ от комплексного аргумента z справедливы следующие утверждения [3,7–9,20]:

– для фиксированного порядка ν все цилиндрические функции $Z_\nu(z)$, *за исключением функций Бесселя* $J_k(z)$ *целого порядка*, являются аналитическими функции от z, имеющими точку ветвления при значении $z = 0$;

– для цилиндрических функций *неотрицательного целого* порядка $\nu = k$ верно выражение вида $Z_{-k}(z) = (-1)^k\ Z_k(z)\ ;\ k = 1, 2, 3, \ldots\ ;\ z \in C$;

– *функции Бесселя* $J_k(z)$ *целого порядка* отличаются от <u>всех</u> остальных цилиндрических функций тем, что они *<u>однозначны</u> и остаются конечными при* $z \to 0$.

Исходя из сказанного, общее решение уравнения (3.3) «сузим» до выражения вида

$$\widetilde{\Omega}(\zeta) = C\zeta^{-1/2} J_1(2i\sqrt{\lambda\zeta})\ , \qquad (3.4)$$

где C – комплексная константа. Ясно, что определение функции переменных издержек продавца над полем комплексных чисел *не имеет реального экономического смысла*. Поэтому необходимо привести выражение (3.4) к некоторой функции, областью определения и кообластью которой являются действительные неотрицательные числа. Представив функцию Бесселя $J_\nu(z)$ [25,XIII.A] в виде ряда

$$J_\nu(z) = \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} \{\, [\, (-1)^k (z/2)^{2k+\nu}\,] / [k!\, \Gamma(k+\nu+1)] \,\}\ ;\ z \in C\ ,$$

получаем выражение:

$$J_1(2i\sqrt{\lambda\zeta}) = i\sqrt{\lambda\zeta}\,\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda\zeta)^k / [k!\,(k+1)!]\,. \tag{3.5}$$

Приняв значение $C = -i\overline{\Omega}\sqrt{\lambda}$ $(\overline{\Omega} \in \Re_1^{\oplus})$, из (3.4) с учетом (3.5) получаем *вид функции переменных издержек продавца:*

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}(\zeta) = \lambda\overline{\Omega}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda\zeta)^k / [k!\,(k+1)!]. \tag{3.6}$$

В величинах $\overline{\Omega}$ и $\widetilde{\Omega}$ учитываются издержки, связанные *только* с проданным товаром (т.е. с *потреблением* товара, а не с его предложением). Совокупный продавец может за данную единицу времени может иметь избыточные издержки, большие, чем $\Omega = \overline{\Omega} + \widetilde{\Omega}$ (конъюнктурные моменты, сезонность продаж, выплата кредитов, форс-мажорные обстоятельства и т.п.). Но эта часть издержек не учитывается в величине Ω за *данную* единицу времени.

Используя модифицированную функцию Бесселя $I_\nu(z)$ [20,XIII.B]

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z/2)^{2k+\nu} / [\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)], \tag{3.7}$$

можно записать:

$$I_0(2\sqrt{\lambda\zeta}) = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda\zeta)^k / (k!)^2;\ I_1(2\sqrt{\lambda\zeta}) = \sqrt{\lambda\zeta}\,\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda\zeta)^k / [k!\,(k+1)!];$$

$$I_2(2\sqrt{\lambda\zeta}) = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda\zeta)^{k+1} /[k!\,(k+2)!];\ I_3(2\sqrt{\lambda\zeta}) = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda\zeta)^{k+3/2} / [k!\,(k+3)!]\,.$$

Учитывая (3.6) и (3.7), функцию *переменных* издержек продавца j-го товара ($j = \overline{1,m}$) следует представить в виде

$$\widetilde{\Omega}_j = \lambda\overline{\Omega}_j\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda\zeta_j)^k / [k!\,(k+1)!] = \overline{\Omega}_j\sqrt{\lambda/\zeta_j}\,I_1(2\sqrt{\lambda\zeta_j}). \tag{3.8}$$

Полные издержки продавца j-го товара запишутся (см. табл. 1), в виде

$$\Omega_j = \overline{\Omega}_j[\,1 + \sqrt{\lambda/\zeta_j}\,I_1(2\sqrt{\lambda\zeta_j})\,]. \tag{3.9}$$

4. Характеристики розничного потребительского рынка

Ценность j-го товара, учитывая (2.8) и (2.8), определена выражением вида

$$U_j = \overline{C}_j + \overline{\Omega}_j\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda\zeta_j)^{k+1} / [k!\,(k+1)!] = \overline{C}_j + \overline{\Omega}_j\sqrt{\lambda\zeta_j}\,I_1(2\sqrt{\lambda\zeta_j}). \tag{4.1}$$

Откуда следует, что стоимость j-го товара, с учетом соотношений (1.9) и (3.8), имеет вид

$$V_j = V(\zeta_j) = \overline{\Omega}_j\sum_{k=0}^{+\infty}[(\lambda\zeta_j)^k / (k!)^2] = \overline{\Omega}_j I_0(2\sqrt{\lambda\zeta_j})\,. \tag{4.2}$$

Используя выражения (2.6) и (3.8), получаем (см. таблицу), выражение вида

$$V_j = \overline{C}_j + \int_0^{\zeta_j}\widetilde{\Omega}_j(x)dx = \overline{C}_j + \overline{\Omega}_j\sum_{k=1}^{+\infty}[(\lambda\zeta_j)^k / (k!)^2]\,.$$

Сравнив это выражение с соотношением (5.2), видим, что

$\overline{C}_j = \overline{\Omega}_j = const;\ j = \overline{1,m}.$

Учтя, что $d\zeta_j / dn_j = 1/n_j$, отметим, что, как и должно выполняться из (2.5) *всегда*:

$$dV_j / dn_j = (\lambda\overline{\Omega}_j / n_j)\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda\zeta_j)^k / [k!\,(k+1)!] = \widetilde{\Omega}_j / n_j = \widetilde{\omega}(n_j). \qquad (4.3)$$

Потребительский излишек, связанный с продажей j-го товара, имеет вид

$$W_j = U_j - V_j = \overline{\Omega}_j[\sqrt{\lambda\zeta_j}I_1(2\sqrt{\lambda\zeta_j}) - I_0(2\sqrt{\lambda\zeta_j}) + 1\,]. \qquad (4.4)$$

С другой стороны, учитывая выражение (2.9), правомерно записать:

$$W_j = \int_0^{\zeta_j} x\,\widetilde{\Omega}'(x)\,dx = \overline{\Omega}_j\,\sum_{k=2}^{+\infty}\{[(k-1)(\lambda\zeta_j)^k\,]/\,(k!)^2\}. \qquad (4.5)$$

Несложно показать, что эти выражения (4.4) и (4.5) эквивалентны. И это *доказывает*, что *принятая гипотеза* (2.8-9) *верна*. Из двух независимых предпосылок (ПрОП и критерия максимизации прибыли продавцов всех товаров) получены одинаковые выражение для величин излишка потребителя по каждому товару.

Прибыль продавца j-го товара, с учетом (4.2) и (3.9), выражается в виде

$$\begin{aligned} P_j = V_j - \Omega_j &= \overline{\Omega}_j[I_0(2\sqrt{\lambda\zeta_j}) - \sqrt{\lambda/\zeta_j}I_1(2\sqrt{\lambda\zeta_j}) - 1\,] = \\ &= -\overline{\Omega}_j + \overline{\Omega}_j\sum_{k=0}^{+\infty}\{[(k-\lambda+1)\,(\lambda\zeta_j)^k\,]/\,[k!\,(k+1)!]\}. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Производная прибыли продавцов j-го товара по спросу на него равна:

$$dP_j / dn_j = (\lambda\overline{\Omega}_j / n_j)\sum_{k=0}^{+\infty}\{[(k-\lambda+2)\,(\lambda\zeta_j)^k\,]/\,[k!\ (k+2)!]\} =$$

$$= (\overline{\Omega}_j / n_j)[\,\sqrt{\lambda/\zeta_j}I_1(2\sqrt{\lambda\zeta_j}) - (\lambda/\zeta_j)I_2(2\sqrt{\lambda\zeta_j})\,] > 0\,. \qquad (4.7)$$

Следовательно, прибыль продавцов с ростом потребления медленно растет.

Розничная цена j-го товара, с учетом (4.2) и (1.7), выражается в виде

$$p_j = V_j / n_j = (\overline{\Omega}_j / \overline{n}_j)\,e^{-\zeta_j}\sum_{k=0}^{+\infty}[(\lambda\zeta_j)^k / (k!)^2] = \overline{\Omega}_j e^{-\zeta_j}I_0(2\sqrt{\lambda\zeta_j})/\overline{n}_j\,. \qquad (4.8)$$

Выражение (4.8) определяет *неявную однозначную обратную функцию* $n_j = \breve{n}\,(p_j \mid \lambda, \overline{n}_j, \overline{\Omega}_j)$, которая представляет собой универсальный вид *функции совокупного спроса* на j-й товар. Ее вид показан на рис.1.

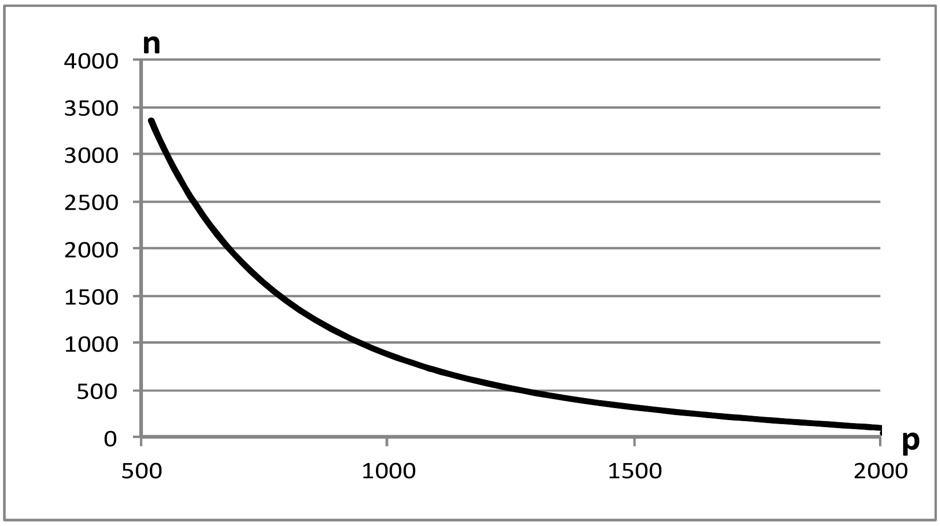
Производная розничной цены j-го товара по спросу на него выражается в виде

$$dp_j / dn_j = (\overline{\Omega}_j / n_j^2)\{\,\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}[(\lambda\zeta)^k / [k!\,(k+1)!] - \sum_{k=0}^{+\infty}[(\lambda\zeta)^k / (k!)^2\,]\} =$$

$$=\ (\overline{\Omega}_j / n_j^2)[\,\sqrt{\lambda/\zeta_j}\ I_1(2\sqrt{\lambda\zeta_j}) - I_0(2\sqrt{\lambda\zeta_j})\,] = -(V_j - \widetilde{\Omega}_j)/n_j^2. \qquad (4.9)$$

Рисунок 1

Вид функции совокупного спроса на товар в зависимости от его цены



$$n = \breve{n}\,(p\,|\,\overline{\Omega},\lambda,\overline{n})\ \text{при}\ \ \lambda = 1.2,\ \ \overline{\Omega} = 100\,000\ \textit{долл.},\ \ \overline{n} = 50\ \text{изделий}$$

5. Критерий максимизация прибыли производителей

Теперь рассмотрим «закупочный» потребительский рынок. Здесь *производители* выступают в роли продавцов, а *продавцы* (с розничного рынка) – в роли покупателей. Для упрощения изложения, что ни снижает его общности, будем считать, что каждый j-й товар в объеме произведен одним производителем.

При краткосрочном рассмотрении «закупочного» рынка его параметры неизменны. Затраты производителя j-го товара представим (см. табл. 1) в виде

$$S_j = \overline{S}_j + \widetilde{S}(n_j) = \overline{S}_j + \widetilde{s}_j n_j;\ \ \overline{S}_j = Const,\ j = \overline{1,m}\,. \tag{5.1}$$

где и – соответственно постоянные, не зависящие от объема продаж (а не предложения!) , и переменные (зависящие от) затраты производителя j-го товара в *единицу* времени. В (5.1) удельные переменные затраты

$$\widetilde{s}_j = \widetilde{S}_j / n_j \tag{5.2}$$

зависят от. Но *в любую единицу времени можно считать константой*.

Прибыль производителя j-го товара $\widetilde{P}_j$ (см. таблицу) имеет вид

$$\widetilde{P}_j = \widetilde{P}(n_j) = \widetilde{V}_j(n_j) - S(n_j)\,, \tag{5.3}$$

где $\widetilde{V}_j$ – стоимость j-го товара. Цена производителя j-го товара равна:

$$\widetilde{p}_j = \widetilde{V}_j / n_j \tag{5.4}$$

Критерий максимизации прибыли производителя j-го товара правомерно записать в следующем виде $\widetilde{P}_j = \widetilde{V}_j(n_j) - \overline{S}_j - \widetilde{s}_j n_j = \max(n_j)\,;\ \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(d\widetilde{V}_j \big/ dn_j = \widetilde{s}_j \right) \wedge \left(d^2\widetilde{V}_j \big/ dn_j^2 < 0 \right), \qquad j = \overline{1,m}\,, \tag{5.5}$$

где переменные удельные затраты производителя j-го товара мы считаем постоянной величиной *только для данной* (*малой*) *единицы времени*. Из условий (5.5) следует: $\widetilde{S}_j = n_j d\widetilde{V}_j \big/ dn_j = d\widetilde{V}_j / d\zeta_j$.

Откуда получаем соотношение вида

$$\widetilde{V}_j = \overline{S}_j + \int_0^{\zeta_j} \widetilde{S}_j(x)dx\ ;\ \ \overline{S}_j = Const\,,\ \ j = \overline{1,m}\,. \tag{5.6}$$

Проинтегрировав (5.6) по частям, получаем выражение вида

$$\widetilde{V}_j = \overline{S}_j + \zeta_j \widetilde{S}_j - \int_0^{\zeta_j} x\widetilde{S}_x'(x)dx\ ;\ \overline{S}_j = Const\,,\ \ j = \overline{1,m}\,. \tag{5.7}$$

Оптимальная торговля в среднестатистическом смысле должна обеспечивать выполнение условия (5.7) для *всех* товаров *в каждую единицу времени*. Пусть для *совокупного продавца*, который выступает как покупатель-оптовик на заготовительном рынке, $\widetilde{U}_j$ и $\widetilde{W}_j$ - ценность купленного количества j-го товара и излишек потребителя соответственно. Используя соотношение $\widetilde{V}_j = \widetilde{U}_j - \widetilde{W}_j$ и учитывая (6.7), *в качестве гипотезы*, примем условия следующего вида

$$\widetilde{U}_j = \overline{S}_j + \zeta_j \widetilde{S}_j\ ;\ \ j = \overline{1,m}\,; \tag{5.8}$$

$$\widetilde{W}_j = \int_0^{\zeta_j} x\widetilde{S}'(x)dx\ ;\ j = \overline{1,m}\,. \tag{5.9}$$

6. Издержки производителей. Производственная функция

Из аддитивности функции бюджета закупочного рынка $\widetilde{V} = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{V}_j$ следует аддитивность функций *для совокупного продавца* ценности купленных товаров $\widetilde{U}(\vec{\zeta})$ и полученного излишка потребителя $\widetilde{W}(\vec{\zeta})$:

$$\widetilde{V}(\vec{\zeta}) = \widetilde{U}(\vec{\zeta}) - \widetilde{W}(\vec{\zeta})\,, \tag{6.1}$$

где $\widetilde{U}(\vec{\zeta}) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{U}_j$ и $\widetilde{W}(\vec{\zeta}) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{W}_j$. Ясно, что формирование структуры покупки на заготовительном рынке совокупный продавец реализует на основе *аналога* ПрОП, который представим в виде условного критерия максимизации вида

$$\begin{cases} \widetilde{U}(\vec{n}) = \max(\vec{n})\,; \\ \sum_j^m (\overline{\Omega}_j + \widetilde{\omega}_j n_j) = \Omega_0 = Const\ ; \\ \widetilde{\omega}_j = const\,,\ \ j = \overline{1,m}\,. \end{cases} \tag{6.2}$$

где $\widetilde{\omega}_k$ определена в виде (2.2). Используя метод множителей Лагранжа, из (6.2) получаем

$$L^*(\vec{n}) = \widetilde{U}(\vec{n}) + \theta\,\Omega_0 - \theta\sum_j^m(\overline{\Omega}_j + \widetilde{\omega}_j n_j) = \max(\theta,\vec{n})\,;\, \widetilde{\omega}_j = const. \tag{6.3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial\widetilde{U}(\vec{n})}{\partial n_j} = \theta\widetilde{\omega}_j\right) \wedge \left(\frac{\partial^2\widetilde{U}(\vec{n})}{\partial n_j^2} < 0\right),\ \ j = \overline{1,m}\,. \tag{6.4}$$

Из соотношения (5.8) и (6.4) получаем:

$$(\zeta_j\widetilde{S}_j)'_{\zeta_j} = \theta\,\widetilde{\Omega}_j = \lambda\,\theta\,\overline{\Omega}_j\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda\zeta_j)^{k-1}/[(k-1)!\,k!]. \tag{6.5}$$

Откуда следует:

$$\widetilde{S}_j = \lambda\theta\,\overline{\Omega}_j\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda\zeta_j)^{k-1}/(k!)^2]. \tag{6.6}$$

Тогда полные затраты производителя j-го товара запишутся в виде

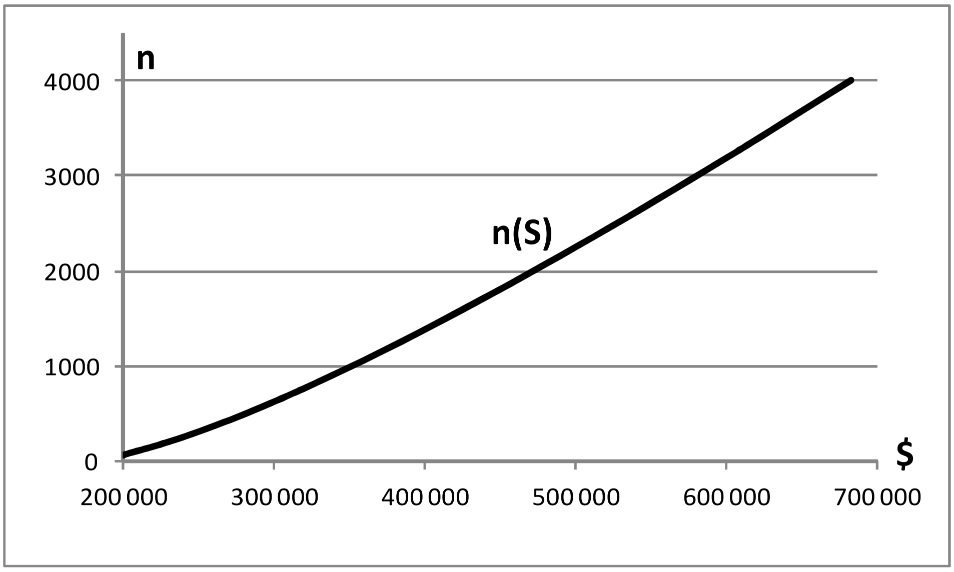
$$S_j = \overline{S}_j + \zeta_j^{-1}\theta\,\overline{\Omega}_j[I_0(2\sqrt{\lambda\zeta_j}) - 1\,]. \tag{6.7}$$

Выражение для затрат производителя j-го товара (6.7) *однозначно* определяет *неявную обратную функцию* $n_j = \widehat{n}\,(S_j\,|\,\lambda,\theta,\overline{n}_j)$, которая представляет собой *производственную функцию* (ее вид показан на рис.2).

Рисунок 2

Вид производственной функции $n = \widehat{n}\,(S\,|\,\lambda,\theta,\overline{n})$

при $\lambda = 1.2$, $\theta = 1.5$; $\overline{S}$ = 200 000 \$, $\overline{\Omega} = 100\,000$ \$, $\overline{n} = 50$ изделий



Производная полных затрат (6.7) по ζ_j равна:

$$(S_j)'_{\zeta_j} = \lambda^2\,\theta\,\overline{\Omega}_j\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)(\lambda\zeta_j)^{k-2}]/(k!)^2]. \tag{6.8}$$

Используя выражения (5.6) и (6.7), для величины стоимости j-го товара на заготовительном рынке получаем соотношение вида

$$\widetilde{V}_j = \overline{S}_j + \theta\, \overline{\Omega}_j \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda\zeta_j)^k / [\, k(k!)^2]\,. \qquad (6.9)$$

7. Характеристики оптовых (заготовительных) рынков

Ценность j-го товара на заготовительном рынке согласно соотношению (5.8) равна:

$$\widetilde{U}_j = \overline{S}_j + \theta\, \overline{\Omega}_j \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda\zeta_j)^k /(k!)^2 = \overline{S}_j + \theta\, \overline{\Omega}_j [I_0(2\sqrt{\lambda\zeta_j}) - 1\,]. \qquad (7.1)$$

Цена (оптовая) производителя j-го товара на заготовительном рынке имеет вид

$$\widetilde{p}_j = \widetilde{V}_j / n_j = (e^{-\zeta_j} / \overline{n}_j)\{\, \overline{S}_j + \theta\, \overline{\Omega}_j \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda\zeta_j)^k / [\, k(k!)^2]\,\}. \qquad (7.2)$$

Производная цены производителя каждого товара по спросу на него выражается в виде $d\widetilde{p}_j / dn_j = (\theta\lambda\overline{\Omega}_j / n_j) \sum_{k=0}^{+\infty} [(\lambda\zeta)^{k-1} / (k!)^2] -$

$$- n_j^2 \{\, \overline{S}_j + \theta\, \overline{\Omega}_j \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda\zeta_j)^k / [\, k(k!)^2]\,\}. \qquad (7.3)$$

Потребительский излишек продавца j-го товара на заготовительном рынке (где он является покупателем) равен:

$$\widetilde{W}_j = \widetilde{U}_j - \widetilde{V}_j = \theta\, \overline{\Omega}_j \sum_{k=2}^{\infty} [\, (k-1)\, (\lambda\zeta_j)^k] / [\, k\, (k!)^2]. \qquad (7.4)$$

С другой стороны, с учетом (5.9) и (6.8), для $\widetilde{W}_j$ справедливо выражение вида

$$\widetilde{W}_j = \int_0^{\zeta_j} x \widetilde{S}'(x) dx = \theta\, \overline{\Omega}_j \sum_{k=2}^{\infty} [\, (k-1)\, (\lambda\zeta_j)^k] / [\, k\, (k!)^2]\,; \;\; j = \overline{1,m}\,. \qquad (7.5)$$

Совпадение значений (7.4) и (7.5) для излишка потребителя на заготовительном рынке свидетельствует о справедливости принятой гипотезы (5.8-9). Из двух различных и невзаимосвязанных предпосылок (ПрОП и критерия максимума прибыли всех производителей) получены одинаковые выражения для всех величин . Прибыль производителя j-го товара вычисляется в виде

$$\widetilde{P}_j = \widetilde{V}_j - S_j = \theta\, \overline{\Omega}_j\, \{\sum_{k=2}^{\infty} [\, (k^2 - \lambda k + 1)\, (\lambda\zeta_j)^{k-1}] / (k!)^2] - \lambda\, \}. \qquad (7.6)$$

Совокупные издержки продавцов на розничном рынке представимы двояко:

$$\Omega_j = \overline{\Omega}_j + \widetilde{\Omega}(n_j) = \widetilde{V}(n_j) + Q(n_j) = \widetilde{V}(n_j) + \overline{Q}_j + \widetilde{Q}(n_j)\,, \qquad (7.7)$$

где $\widetilde{V}(n_j)$ - сумма, которую совокупный продавец заплатил за j-й товар производителю, а $Q(n_j)$ - его собственные издержки, которые делятся на постоянные и переменные: $Q(n_j) = \overline{Q}_j + \widetilde{Q}(n_j)$. Откуда получаем выражение вида

$$\overline{\Omega}_j + \lambda\, \overline{\Omega}_j \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda\zeta_j)^k / [\, k!(k+1)!] = \overline{S}_j + \overline{Q}_j + \widetilde{Q}_j + \theta\, \overline{\Omega}_j \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda\zeta_j)^k / [\, k(k!)^2]\,. \qquad (7.8)$$

В результате приходим к выводу, что верны соотношения вида

$$
\begin{cases}
\overline{Q}_j = (1+\lambda)\,\overline{\Omega}_j - \overline{S}_j\,; \\
\widetilde{Q}_j = \overline{\Omega}_j \sum_{k=1}^{\infty} [(k(\lambda-\theta)-\theta)(\lambda\zeta_j)^k] / [\,k\,k!\,(k+1)!\,].
\end{cases}
\tag{7.9}
$$

Соотношения (7.9) определяют величины постоянных и переменных издержек продавца *j*-го товара за вычетом тех денег $\widetilde{V}(n_j)$, которые были заплачены производителю на заготовительном рынке за покупку этого товара.

Развитием темы в рамках предложенного подхода, должны стать, во-первых, разработка эконометрической методики [1], которая свяжет параметры потребительских рынков с отчетной и торговой статистикой. Во-вторых, от количественного описания стационарных потребительских рынков нужно перейти к исследованию динамики потребления товаров в ее взаимосвязи с параметрами производства и торговли. Это позволит не только оценить изменения характеристик производства, торговли и потребления, но и даст возможность получить выражения для тех параметров, которые без динамического анализа потребительских рынков исследовать вообще бессмысленно (например, эластичность спроса и издержек (затрат, предельные нормы замены товаров и подобные характеристики рынка).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С*. Прикладная статистика и основы эконометрики. М., 1998.
2. *Аристотель*. Никомахова этика // Философы Греции. М., 1999.
3. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М., 1974.
4. *Горбунов В.К.* Математическая модель потребительского спроса. М., 2004.
5. *Зайцев Ф.В., Полянин А.Д.* Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1997.
6. *Ковалев С.В*. Экономическая математика. М., 2010.
7. *Кратцер А., Франц В*. Трансцендентные функции / Пер. с англ. М., 1963.
8. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М., 1962.
9. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М., 1963.
10. *Пиндайк Р., Рубинфельд Д.* Микроэкономика / Пер. с англ. М., 2000.

11. *Слуцкий Е.Е.* К вопросу сбалансированного бюджета потребителя // Народнохозяйственные модели: теоретические вопросы потребления. (1915, переиздание). М., 1963.
12. *Хикс Дж*. Стоимость и капитал / Пер. с англ. (1939, переиздание). М., 1993.
13. *Уайльд Д.* Методы поиска экстремума / Пер. с англ. М., 1967.
14. *Черепанов Е.В*. Нетрадиционные вероятностно-статистические методы для социально-экономических и социологических исследований. М., 2012.
15. *Черепанов Е.В*. Критерии оптимизации структуры потребления на многотоварных рынках // Математико-статистический анализ социально-экономических процессов. Межвузовский сборник научных трудов, вып. 10. М., 2013.
16. *Черепанов Е.В.* О количественном описании монопольного потребительского рынка // Гуманитарные и социальные науки, 2013. 1. http://www.hses-online.ru/2013/01/08_00_05/12.pdf
17. *Черепанов Е.В*. Математическое моделирование неоднородных совокупностей экономических данных. М., 2013.
18. *Черепанов Е.В.* Математическое описание многотоварного потребительского рынка // Научная дискуссия: вопросы экономики и управления. Материалы XI Международной научно-практической конференции. М., 2013.
19. *Черепанов Е.В*. Количественные взаимосвязи характеристик оптовых и розничных потребительских рынков // Гуманитарные и социальные науки. 2013. 3. http://www.hses-online.ru/2013/03/08_00_13/06.pdf
20. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф*. Специальные функции / Пер. с нем. М.,1977.
21. *Dupuit J*. De la mesure de l`utilite des travaux publics. // Annales des ponts et chaussees, VIII, 1844, ser. 2.
22. *Jevons W.S*. Notice of a general mathematical theory of political economy. – British Assoc. For the Advancement of Science. Report of the 32 Meeting Transaction of the Sections. L.J. Murray, 1862.
23. *Jevons W.S*. Brief of a general mathematical theory of political economy // Journal of the Statistical Society of London, XXIX, 1866. № 2.

24. *Simon H*. Theories of decision-making in economics and behavioral science // Microeconomics: Selected Reading. Ed. by E. Mansfield. N.Y., 1971.
25. *Viner J.* Cost curves and supply curves. In: «Readings in Price Theory». Homewood, 1952.

REFERENCES

1. *Aivazyan S.A., Mkhitaryan V.S*. Applied statistics and the basics of econometrics. Moscow, 1998.
2. *Aristotle.* Nicomachean Ethics // philosophers of Greece. Moscow, 1999.
3. *Arsenin V.Y.* Methods of mathematical physics, and special functions. M., 1974.
4. *Gorbunov V.K.* Mathematical model of consumer demand. Moscow, 2004.
5. *Zaitsev F.V., Polyanin A.D.* Handbook of linear ordinary differential equations nym. Moscow, 1997.
6. *Kovalev S.V*. Economic Mathematics. Moscow, 2010.
7. *Kratzer, Franz B.* Transcendental functions / Per. Translated from English. Moscow, 1963.
8. *Kuznetsov D*. Special functions. M., 1962.
9. *Lebedev N.N.* Special functions and their applications. Moscow, 1963.
10. *Pindyck R., Rubinfeld D*. Microeconomics / Per. Translated from English. Moscow, 2000.
11. *Slutsky E.E.* On the issue of a balanced budget consumer // Narodnohozyayst-governmental model: theoretical issues of consumption. (1915 reprint). Moscow, 1963.
12. *Hicks J.* Value and Capital / Per. Translated from English. (1939 reprint). Moscow, 1993.
13. *Wilde D.* Methods for finding an extremum / Per. Translated from English. Moscow, 1967.
14. *Cherepanov E.V*. Unconventional probabilistic and statistical methods for the socio-economic and sociological research. M., 2012.

15. *Cherepanov E.V.* Criteria for optimizing the structure of consumption mnogotovarnyh markets // mathematical and statistical analysis of the socio-economic processes. Interuniversity collection of scientific works, vol. M. 10, 2013.
16. *Cherepanov E.V.* On the quantitative description of the monopoly of the consumer market // Humanities and Social Sciences, 2013. 1. http://www.hses-online.ru/2013/01/08_00_05/12.pdf
17. *Cherepanov E.V.* Mathematical modeling of non-uniform sets of eco-nomic data. M., 2013.
18. *Cherepanov E.V.* The mathematical description of the consumer market mnogotovarnogo // scientific discussion: questions of economics and management. Proceedings of the XI International Scientific and Practical Conference. M., 2013.
19. *Cherepanov E.V.* Quantitative correlation characteristics of wholesale and retail markets in consumer // Humanities and Social Sciences. 2013. 3. http://www.hses-online.ru/2013/03/08_00_13/06.pdf
20. *Jahnke E., Emde F.* Losch function / Per. with it. M., 1977.
21. *Dupuit J.* De la mesure de l`utilite des travaux publics. // Annales des ponts et chaussees, VIII, 1844, ser. 2.
22. *Jevons W.S.* Notice of a general mathematical theory of political economy. – British Assoc. For the Advancement of Science. Report of the 32 Meeting Transaction of the Sections. L.J. Murray, 1862.
23. *Jevons W.S.* Brief of a general mathematical theory of political economy // Journal of the Statistical Society of London, XXIX, 1866. № 2.
24. *Simon H.* Theories of decision-making in economics and behavioral science // Microeconomics: Selected Reading. Ed. by E. Mansfield. N.Y., 1971.
25. *Viner J.* Cost curves and supply curves. In: «Readings in Price Theory». Homewood, 1952.

26 августа 2014 г.