Х.П.Дзебисов, Ж.Н.Кцоева
Финансовый университет при правительстве Российской федерации
г. Владикавказ, Россия

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ТОЧКАХ ОКРУЖНОСТИ ОСОБЕННОСТЕЙ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данной работе используется аппарат интегральных представлений [2, с.22], исследуется их поведение в пространстве C^2, вводятся специальные классы функций на основе интегральных формул и находятся их предельные значения в точках окружностей особенностей

$B_1 = \{(z)\colon |z_1| = \beta^{-\delta_1}, |z_2| = 0\}$ и $B_2 = \{(z)\colon |z_1| = \alpha^{-\delta_1}, |z_2| = 0\}$.

Ключевые слова: Интегральные формулы, интегральное представление, классы функций, область аналитичности, непересекающиеся множества

In this work the device of integrated representations received by the author in [2, c.22] is used, their behavior in C^2 space is investigated, special classes of functions on the basis of integrated formulas are entered and there are their limit values in points of circles of features

$B_1 = \{(z)\colon |z_1| = \beta^{-\delta_1}, |z_2| = 0\}$ и $B_2 = \{(z)\colon |z_1| = \alpha^{-\delta_1}, |z_2| = 0\}$.

Key words: integrated formulas, integral presentations, classes of functions, limit values, analyticity area, non-overlapping sets

В данной работе рассмотрим приложения интегральных формул

$$f_1 = \frac{1}{4\Pi^2 i}\int_\alpha^\beta d\omega \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta=1|} \frac{F(t,\eta)d\eta}{\eta - u(\omega,\delta_1,\delta_2)}, (z) = (z_1, z_2) \in C^2,$$

и

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\Pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta=1|} \frac{F(t,\eta)d\eta}{\eta - u}, (z) = (z_1, z_2) \in C^2,$$

полученных в [1, с.69-76] и [2, с.22], где $F(t,\eta)$ – функции, удовлетворяющая условию Гельдера-Липшица ($F(t,\eta) \in \mu$) по переменной η ,

$$u(\omega,\delta_1,\delta_2) = \omega^{\delta_1} z_1 e^{b\omega^{\delta_2}} z_2,\ u = z_1 \cdot e^{bz_2},\ b = e^{-it},\ \delta_1 > 0, \delta_2 > 0.$$

<u>Определение 1.</u> К классу $N\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ и β в пространстве C^2 характеризуются следующими утверждениями.

<u>Теорема 1</u> [2, с.22]. Пусть $F(t,\eta) \in \mu$. Тогда функции класса $N\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ являются аналитическими в областях

$$G(\beta_1 1, \delta_1 2, \delta_1 1) = \{(z)\colon \beta^{\delta_2}|z_2| - ln\beta^{\delta_1}|z_1| = 0\}.$$

<u>Теорема 2</u> [2, с.22]. Функции класса $N\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ в области $C^2 \backslash \overline{(G(\beta,\delta_1,\delta_2) \cup E(\delta_1,\delta_2))}$ являются, вообще говоря, неаналитическими.

Теорема 3 [2, с.22]. Пусть $F(t,\eta) \in \mu$. Тогда функции класса $N\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ являются непрерывными всюду в C^2.

Поведение же функция класса $N\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ в области неаналитиичности характеризуется следующей теоремой.

Теорема 4 [2, с.22]. Пусть $F(t,\eta) \in \mu$. Тогда область неаналитичности функций класса $N\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ разбивается на непустые непересекающиеся множества $E_k(\delta_{\downarrow}1, \delta_{\downarrow}2)$ (k= 1, 2, …, 6), в каждом из которых функции класса $N\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ вычисляются по определенным формулам [1, с.69 - 76]. Так, например, в области

$$E_1(\delta_{\downarrow}1, \delta_{\downarrow}2) = \{(z): \alpha^{\uparrow}(\delta_{\downarrow}2)\,|z_{\downarrow}2| + ln\alpha^{\uparrow}(\delta_{\downarrow}1)\,|z_{\downarrow}1| < 0, \quad \beta^{\uparrow}(\delta_{\downarrow}2) - \ln [\beta^{\uparrow}(\delta_{\downarrow}1)\,|z_{\downarrow}1| < 0] \}$$

$$f_1(z) = \int_{\alpha}^{\varphi_1} H^{+} d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega + \int_{\omega_1}^{\beta} H^{-}(\omega) d\omega,$$

где

$$H^{+(-)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{\pm}\left(t, u(\omega_1 \delta_1 \delta_2)\right) dt$$

$$f^{\pm}\left(t, u(\omega_1 \delta_1 \delta_2)\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{F(t,\eta) d\eta}{\eta - u(\omega, \delta_1, \delta_2)}$$

$$|u(\omega, \delta_1, \delta_2) < 1| \quad (|u(\omega, \delta_1, \delta_2) > 1|),$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varphi(\omega,\delta_1,\delta_2)+\psi}^{2\pi-\varphi(\omega,\delta_1,\delta_2)-\psi} f^{+}(t, u(\omega, \delta_1, \delta_2)) dt + \int_{-\varphi(\omega,\delta_1,\delta_2)+\psi}^{\varphi(\omega,\delta_1,\delta_2)+\psi} f^{-}(t, u(\omega, \delta_1, \delta_2)) dt\right) \quad (1)$$

$$\varphi(\omega, \delta_1, \delta_2) = \arccos\left(\frac{-\ln \omega^{\delta_1} |z_1|}{\omega^2 |z_2|}\right), \quad \psi = \arg z_2 .$$

Теорема 5 [1, с.69 - 76]. Если $F(t,\eta) \in \mu$, то функции φ(z) класса β , представимые интегралом (2):

а) являются аналитическими в области $G = \{(z): |z_2| + \ln|z_1| < 0\}$ и в области $E_1 = \{(z): |z_2| - \ln|z_1| < 0\}$, в которых имеются вычислительные формулы

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi^{+}(t,\eta) dt, \qquad (z) \in G,$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi^{-}(t,\eta) dt, \qquad (z) \in E^1,$$

б) функции класса β в области $E = \{(z): |z_2| + \ln|z_2| > 0, |z_2| - \ln|z_1| > 0\}$ являются, вообще говоря, неаналитическими функциями и представимы формулой:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi+\psi}^{2\pi-\varphi+\psi} \Phi^{+}(t,u) dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi+\psi}^{\varphi+\psi} \Phi^{-}(t,u) dt, \quad \text{где}$$

$$\Phi^{\pm}(t,u) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\eta|=1} \frac{F(t,\eta) d\eta}{\eta - u} \qquad \begin{matrix}|u| < 1 \\ (|u| > 1)\end{matrix}$$

Теорема 6 [3, с.135-144]. Функции класса β непрерывны всюду в C^2, за исключением, быть может, точек окружности особенностей R ={(z) : $|z_1|=1$, $|z_2|=0$, в которых почти всюду имеются определенные предельные значения.

Замечание 1. Области аналитичности $G(\beta,\delta_1(1,)\delta_1 2)$ и G, соответственно, для функций классов $N=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ и β получили название определяющих областей ([1, с.69-76],[2, с.22],[3, с.135-144]).

Замечание 2. Функции классов $N=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ и β получили название квазианалитических, так как они аналитические в одних и не аналитические в других областях пространства C^2, но и в последних являются аналитическими на торах R={(z); $|z_1|=R_1$, $|z_2|=R_2$].

Ниже нами будут рассмотрены функции класса β с определяющими областями $G(\beta,\delta_1(1,)\delta_1 2)$ и $G(\alpha,\delta_1(1,)\delta_1 2)$ для которых :

а) областями аналитичности, соответственно, будут еще и области

$E_1(\beta,\delta_1,\delta_2)=\{(z):\ \beta^{\delta_2}|z_2|-\ln\beta^{\delta_1}|z_1|<0\}$ и $E_1(\beta,\delta_1,\delta_2)$;

б) областями неаналитичности, соответственно, будут области

$E(\beta,\delta_1,\delta_2)=\{(z):\ \beta^{\delta_2}|z_2|-\ln\beta^{\delta_1}|z_1|>0,$ и $(z):\ \beta^{\delta_2}|z_2|-\ln\beta^{\delta_1}|z_1|>0\}$

и $E(\alpha,\delta_1,\delta_2)$;

в) в областях аналитичности представлены следующими интегралами

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[f^{(\pm)}(t,u](\beta,\delta_1,\delta_2))dt\equiv H^{(\pm)}\beta,$$

в области $G(\beta,\delta_1(1,)\delta_1 2)$ $[(E]_1(\beta,\delta_1,\delta_2))$;

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f^{(\pm)}(t,u(\alpha,\delta_1,\delta_2))\,dt\equiv H^{(\pm)}\alpha,$$

в области $G(\alpha,\delta_1(1,)\delta_1 2)$ $(E(\alpha,\delta_1,\delta_2))$;

г) в областях неаналитичтности, соответственно, представлены интегралами $G(\beta)$ и $G(\alpha)$, определяемые из формулы (1).

Заметим, что утверждения пунктов а)-г) следует из теорем 5 и 6.

Далее рассмотрим функциональную связь функций классов $N\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ и β линейным дифференциальным оператором

$$D=\delta_1\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\overline{z_1}\partial}{\partial\overline{z_1}}\right)+\delta_2\left(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{\overline{z_2}\partial}{\partial\overline{z_2}}\right),$$

Теорема 7. Пусть $F(t,\eta)\in\ \mu$. Тогда в пространстве C^2 функции классов $N=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \delta_1, & \delta_2\end{pmatrix}$ и β с определяющими областями $G(\beta,\delta_1(1,)\delta_1 2)$ и $G(\alpha,\delta_1(1,)\delta_1 2)$ удовлетворяют следующим соотношениям

а) $L[f(z)]=\beta H^{+}(\beta)-\alpha H^{+}(\alpha),\qquad (z)\in G(\beta,\delta_1,\delta_2)$

б) $L[f(z)]=\beta H^{-}(\beta)-\alpha H^{-}(\alpha),\qquad (z)\in E(\delta_1,\delta_2)$

в) $L[f(z)]=\beta H^{-}(\beta)-\alpha H^{+}(\alpha),\qquad (z)\in E_1(\delta_1,\delta_2)$

г) $L[f(z)]=\beta G(\beta)-\alpha H^{+}(\alpha),\qquad (z)\in E_2(\delta_1,\delta_2)$

д) $L[f(z)]=\beta G(\beta)-\alpha G(\alpha),\qquad (z)\in E_4(\delta_1,\delta_2)\cup E_5(\delta_1,\delta_2)$

e) $L[f(z)] = \beta G(\beta) - \alpha H^{-}(\alpha),$ $\qquad (z) \in E_6(\delta_1, \delta_2)$

Теорема 8. Пусть функции $f(z) \in N\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \delta_1, & \delta_2 \end{pmatrix}$ и $\varphi(z) \in \beta$. Тогда $L[f(z)] = f(z) + D[f(z)]$ в точках окружностей особенностей B_1 и B_2 из областей G($\beta, \delta_1(1\ ,)\ \delta_1 2)$ и E($\delta_1(1\ ,)\ \delta_1 2)$ имеют следующие предельные значения

$L[f^{+}(z^0)] = \beta\varphi_0(z^0) + \beta\varphi_1(z^0) - \alpha\varphi_3, (z^0) \in B_1,$

$L[f^{-}(z^0)] = \beta\varphi_4(z^0) - \alpha\varphi_0(z^0) - \alpha\varphi(z^0)_1, (z^0) \in B_2,$

$\varphi_0(Z^0)$ И $\varphi_1(Z^0)$ представимы двойными интегралами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуляев А.В.* О функциях, определяемых некоторым интегралом// Математический анализ. М., 1969. в.14.
2. *Дзебисов Х.П.* Интегральные представления голоморфных функций в пространстве C^2 и их приложениях решению краевых задач математической физики // Автореферат диссертации на соискание степени кандидата физ.-мат.наук. Нальчик, 1999. 22 с.
3. *Литвинюк В.А*. Дифференциальные свойства некоторых интегралов // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. М., 1973. в. 15(1).
4. *Уляшев В.Т*. Интегральные представления Темлякова-Барвина в случае бесконечных полных двоякокруговых областей // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. М., 1973. в. 15(1).